

## « Peut-on envisager une transposition didactique des mathématiques qui les rende accessibles au plus grand nombre ? »

Philippe Lombard  
Irem de Lorraine

Un jour — c'était, dit-on, bien avant que le monde ne soit monde — quelque divinité en colère décida d'inventer une femme qui serait particulièrement belle et qui serait tout aussi parfaitement sottée... Le soleil dut la pétrir d'argile, les vents lui insufflèrent vie, le messenger des dieux en fit enfin présent aux hommes... On l'appela : Pandore. Cela relève évidemment d'une modélisation de l'univers qui n'était encore ni cartésienne, ni relativiste, ni même quantique, bien que le devenir des êtres et des choses soit déjà soumis aux caprices de ceux qui, du haut de leur Olympe, jouaient aux dés toutes les destinées. Cette créature imaginaire n'a donc qu'indirectement à voir avec notre sujet. Toujours est-il que depuis que le monde est monde — enfin, disons depuis Pythagore de Samos et Thalès de Milet — les mathématiciens se sont toujours fixés pour but de percer les secrets des dieux (c'est-à-dire des formes et des nombres) et que notre sujet tient précisément dans la question de savoir s'il est possible aux mathématiciens de transmettre aux communs des mortels le résultat de leurs recherches... Dans la question de savoir s'il existe — comme on dit aujourd'hui — une « transposition didactique des mathématiques qui les rende accessibles au plus grand nombre »...

Il n'est sans doute pas nécessaire de remonter ainsi à la nuit des temps, mais on peut songer que le problème s'est posé à bien des périodes. Et si l'expression « au plus grand nombre » évoque, à notre époque, l'idée fort démocratique des mathématiques pour tous, il n'en reste pas moins qu'en lui donnant son sens relatif de « au plus grand nombre possible » (qui, de surcroît, ne veut plus dire grand-chose), bien des mathématiciens ont dû, à un moment ou à un autre, être confrontés à cette question. Ils se sont donc heurtés — comme on dit aujourd'hui — à la difficulté de trouver une « transposition didactique » du savoir mathématique de leurs contemporains...

Croyez bien que si je donne ainsi l'impression d'insister quelque peu sur la formulation d'un problème qui semblera banale aux lecteurs initiés, c'est justement parce que la façon même dont il est énoncé a une importance capitale et que notre sujet n'aurait certainement pas le moindre intérêt s'il n'était, précisément, formulé en ces termes. L'essentiel à faire comprendre, en effet, à propos de ce que nous appellerons tout simplement « le problème de la transposition didactique » est que cette question ne s'est — premièrement — mise à exister vraiment que lorsqu'elle a été ainsi formulée et que — secondement — elle n'a été ainsi formulée qu'à l'instant même où elle a été résolue ! Le phénomène pourrait paraître paradoxal mais il n'est pas rare. Il en va ainsi d'une foule de problèmes dont il serait aisé de trouver des exemples dans la vie quotidienne : adapter la courbure des rondes silhouettes aux modernes canons des formes de starlettes, ou épargner aux frais et frêles épidermes les ridicules creusées qui guettent les plus fermes sont ainsi, à l'évidence, autant de questions de la vie de tous les jours qui n'ont été pertinemment énoncées qu'au moment précis où leur solution a été découverte... c'est-à-dire, en l'occurrence, avec l'apparition de gondoles surchargées de yaourts aux bifidus allégés et d'onguents à base de liposomes glutons...

Mais revenons à notre sujet qui n'a rien à voir avec les rêves callipyges ou le flétrissement des fruits mûrs et qui va nous ramener très exactement aux débuts de notre société de consommation — à la fin des années soixante

— et à ce dont chacun se souvient sous le nom de « réforme des maths modernes ». A la question « existe-t-il une transposition..., etc. » les professeurs de l'époque répondaient alors sans hésiter : *« Que l'enseignement des mathématiques soit analysé dans son contenu, dans sa forme pédagogique, ou dans son rôle social ou économique, il est certainement très remarquable que les conclusions soient convergentes ; ce qu'on appelle un peu vite la mathématique moderne, ce qu'il conviendrait mieux d'appeler la conception constructive, axiomatique, structurelle des mathématiques, fruit de l'évolution des idées, s'adapte « comme un gant », nous permettons-nous de dire, à la formation de la jeunesse de notre temps. Il est important que tous les citoyens et en premier lieu tous les éducateurs en comprennent les raisons et dans quelle voie favorable cela conduit l'enseignement. La mathématique est une science vivante : le foisonnement des découvertes s'y conjugue avec une réorganisation de son architecture ; les notions ensemblistes acquises à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, la notion de structure qui sert d'armature à l'œuvre de Bourbaki peuvent être comparées, quant à leurs effets, au rôle qu'aurait un urbaniste disposant de crédits pour supprimer les bidonvilles. »* Ou encore : *« Aujourd'hui les notions ensemblistes, les structures fondamentales de l'algèbre, les idées de base de la topologie irriguent toutes les mathématiques d'un sang neuf qui a la vertu de rendre mieux accessible un niveau d'abstraction anciennement réservé à des initiés privilégiés. Autour de quelques thèmes principaux, s'organise toute l'activité mathématique contemporaine et leur connaissance éclaire aussi bien les problèmes que la ménagère se pose en faisant son marché que les théories que doit affronter le physicien nucléaire, l'ingénieur ou l'architecte. »*

Bref. « la » mathématique moderne était « aux » mathématiques de papa ce que la lampe d'Edison fut à la bougie stéarique, et l'on se demande encore aujourd'hui, en relisant ces lignes avec trente années de recul, ce qui pouvait déclencher un tel enthousiasme réformateur : contexte soixante-huitard ? illusion d'intelligentsia ? suivisme socio-politique ? fascination manipulée par quelque gourou nobellisé ?... Il y avait sans doute un peu de tout cela, mais il est clair que l'on ne saurait s'en tenir à des explications aussi simplistes et les quelques naïvetés citées plus haut, empruntées à des opuscules de l'époque, ne sauraient masquer un mouvement réformateur beaucoup plus profond, de l'essence de ceux que l'on rencontre deux ou trois fois par siècle en matière de sciences en général et d'enseignement des sciences en particulier : un jour une société toute entière semble décréter (par exemple) le primat des concepts les plus abstraits, pour qu'un peu plus tard chacun s'accorde sur un urgent retour au concret et à l'expérience ! Sans entrer dans une discussion épistémologique qui ne nous éclairerait guère puisqu'il suffit, en définitive, de mesurer l'erreur des années soixante au retour en arrière qui s'est opéré depuis, disons simplement que le phénomène qui nous intéresse relève de ce que l'on pourrait appeler une crise cyclique... de l'ordre du « sens » ! Pour le dire autrement, les mathématiques se sont trouvées, vers les années cinquante, à un moment où nombre de mathématiciens s'imaginèrent que le point de vue « structuraliste » constituait un indépassable progrès et fournissait la clef d'un changement de présentation aussi efficace que celui de l'introduction du système décimal au début du XIX<sup>ème</sup> siècle. Il n'y a rien là, au fond, de bien exceptionnel et nous sommes en face d'une lubie collective du type de celles qui poussent périodiquement à croire que l'on a enfin trouvé le « sens » de dizaines de siècles de recherches et que l'on tient désormais dans ses mains une espèce de « pierre philosophale didactique » propre à transmettre ce « sens » aux générations actuelles. D'un seul coup (et par le miracle d'une réforme), les études scientifiques seront ouvertes à tous et trouveront une efficacité telle que chacun en verra son existence éclairée d'une lumière nouvelle. Le « sens » des arcanes les plus abscons apparaîtra enfin pour s'inscrire dans une

progression si simple que seule une mauvaise foi avérée parviendrait encore à trouver que la science est une discipline réservée à quelques-uns...

C'est que jusque là, pour le mathématicien, le scientifique et même l'élève, le mot « sens » n'évoquait au fond rien d'autre que ce que tout un chacun peut entendre lorsqu'il parle de « sens de la langue » ou (plus imprudemment) de « sens de l'histoire ». Il n'était constitué que de strates successives, accumulées lentement au cours d'une sédimentation de concepts ou d'outils, dont la pertinence et la nécessité ne prenaient souvent de signification qu'avec une longue pratique, tissant d'analogies plus ou moins naturelles un savoir que personne, au fond, ne pouvait prétendre maîtriser à la perfection. Pire : qui aurait pu sincèrement affirmer auparavant que l'activité scientifique elle-même eut véritablement « un » sens ? Et que ce qu'il était convenu, par une sorte de commodité de langage, d'appeler le sens de la géométrie, de l'arithmétique ou de la mécanique ne soit pas autre chose, en dernière analyse, qu'une sorte de lueur changeante donnant à l'édifice un éclairage un peu chiche, incapable d'en mettre en évidence, simultanément, tous les recoins... Un peu à la manière d'un vitrail dont les fragments de lumière se seraient agencés pour construire quelques motifs, mais où chacun aurait pu apercevoir des formes fluctuantes, selon sa culture ou son époque. Un vitrail édifié par de lointains ancêtres sur des symboles iconographiques oubliés ou dépassés, mais dont les reflets continueraient à conférer à tout l'ensemble une ambiance diffuse, suffisante pour distinguer quelques détails familiers baignés par la pénombre, sans jamais permettre une vision globale. Imaginez, dans ces conditions, l'enthousiasme de ceux qui crurent brusquement détenir la clef de tous les mystères ! Non seulement « la » mathématique toute entière s'éclairait d'un jour nouveau, mais son apprentissage, aussi élitiste qu'il ait pu paraître jusque là, ne devait plus poser que des problèmes secondaires dont la dynamique nouvelle aurait tôt fait de venir à bout... pour peu qu'elle s'inscrive dans le cadre des idées modernes ! En cherchant à percer les secrets des dieux, les mathématiciens avaient fini par leur dérober le feu... rien, à l'avenir, ne pourrait les empêcher d'en faire présent aux hommes... à la façon « d'un urbaniste supprimant les bidonvilles » !

Délire collectif ? Pari stupide ? Sans doute, mais pas plus que bien d'autres du passé, comme ceux de la « grammaire structurale » ou du « plan informatique pour tous ». Et, pour le futur, les gondoles de la modernité ne manquent pas, surchargées de « retours à l'expérience de la maternelle à l'université » ou de randonnées sur quelques réseaux interplanétaires... On devrait certes s'amuser de tels engouements et se dire que le « progrès » n'est forgé, en vérité, que de ce qui finira bien par surnager des expériences brouillonnes de cette sorte, mais comment ne pas voir que le phénomène qui nous occupe met en jeu des ressorts qui vont bien au-delà des modes passagères ou des innocents besoins de changement ? Le moteur de telles mirifiques réformes est toujours — nécessairement pourrait-on dire — fondé sur la conviction profonde de toute une génération de détenir une part substantielle de vérité, scientifique et pédagogique à la fois. Le reste est affaire de circonstances, c'est-à-dire de contexte politique. Mais l'important est sans conteste dans ce « syndrome de Prométhée » qui peut pousser périodiquement les « détenteurs du feu » à s'imaginer qu'ils sont soudain capables de le transmettre aux autres, pour la simple et bonne raison qu'ils possèdent enfin le secret du « sens » de chaque concept ou de chaque phénomène et qu'ils disposent, au surplus, du tour de main permettant d'agencer les fragments du savoir dans une composition didactique dissipant miraculeusement les ténèbres.

On sait, sans doute, ce qu'il advint du malheureux Prométhée qui n'avait, somme toute, réussi qu'à déclencher contre lui la vindicte des divinités... On oublie plus souvent que le courroux de l'Olympe se tourna aussi dans la direction des mortels... et que cette colère prit la forme d'une créature particulièrement séduisante offerte aux hommes par le messager des dieux... Malheureusement, ceux-ci n'opèrent plus guère ainsi depuis belle lurette et, tout au moins pour ce qui concerne l'aventure des maths modernes, notre Pandore pourrait plutôt s'appeler « pensée didactique magique » ou — si l'on préfère rentrer dans le détail et revenir à notre sujet — prendre le nom de « théorie » de la transposition didactique...

Par lui-même, le « problème » de la transposition didactique est déjà, par essence, consubstantiel à toute velléité de réforme globale des programmes. Finies les questions classiques des pédagogues d'antan sur la dose adéquate de gammes nécessaires aux élèves, dépassées les subtiles interrogations à propos du chemin propice à guider les pas du disciple dans les pas du maître, oubliées les progressions empiriques et les étapes épistémologiques préparatoires, la seule problématique pertinente sera dorénavant celle de la « transposition » convenable d'un « savoir savant » bien établi — d'ailleurs aussi précis que définitivement figé — en un « savoir enseigné » qui n'en saurait être que le décalque. Dès lors chaque notion, chaque concept, chaque phénomène, chaque axiome n'a plus d'intérêt que dans son rapport précis et quantifié au « sens » qui éclaire la discipline dans son intégralité. C'est-à-dire qu'à la manière du « phlogistique » introduit par les chimistes de jadis pour mesurer la dose propre de « feu » attachée à chacun des éléments simples, les différents atomes de la pensée scientifique se doivent désormais de receler une part mesurable de sens spécifique, dont on pourra évaluer la dégradation éventuelle au cours de sa transmutation en « savoir enseigné ». L'apprentissage n'est plus cet immense et mystérieux *flux de savoirs* dont la spirale aboutissait naguère au « savoir du savant » après avoir formé au passage des maîtres chargés de dispenser plus tard une partie de leur propre culture. L'observateur extérieur n'a plus aujourd'hui qu'à « théoriser » le décalage et la déformation entre l'image unique du « savoir savant » et son reflet plus ou moins aseptisé, de l'autre côté du miroir formé par le système éducatif.

Brochant sur le tout, la « théorie » de la transposition didactique vient heureusement à la rescousse... Paravent de chimères, son objet n'est naturellement pas d'énoncer quelque règle efficace concernant le moderne « phlogistique », ni même de constituer l'embryon d'une sorte de « mécanique des fluides » dégageant les lois rationnelles qui régiraient un quelconque « flux de savoirs ». Bien au contraire. Car on aura compris que son seul but est de servir de référence emblématique à l'impérieuse nécessité de justifier une réforme en gestation... comme une cruelle illustration de la volonté perverse des dieux en colère... Car si l'Olympe laisse parfois entrevoir aux mortels une part de ses secrets — que ce soit dans l'ordre des formes et des nombres ou dans celui des « choses du monde » qui fascinent tant les scientifiques — les conquêtes de cette nature se font toujours à force de raison, de controverses et de réflexions. La pensée magique qui semble prendre le dessus dès qu'il s'agit d'appréhender les actes irraisonnés submerge inexorablement, sans que l'on y prenne garde, les plus infimes parcelles de bon sens ou d'esprit critique !

Est-ce à dire que jamais les dieux qui nous gouvernent ne permettront aux simples mortels que nous sommes de comprendre lucidement les phénomènes de l'apprentissage ? Après trente années de crise dans l'enseignement des mathématiques, force est de constater que nous n'avons guère avancé... Et, pour rester dans la seule question de la « transposition didactique » il est clair que la « mécanique des fluides » attendue est bien loin d'être au rendez-vous. La vérité est malheureusement que nous ne disposons

même pas du moindre espoir d'une « théorie des marées » qui éclairerait — tout simplement — le balancier des réformes séculaires...

Il reste que le flux et le reflux, s'ils ne laissent pratiquement guère de traces constructives, n'en découvrent pas moins, de ci de là, nombre d'écueils invisibles à marée haute, et qui rendent la navigation périlleuse (ou impossible) « au plus grand nombre ». Une meilleure connaissance de ceux-ci permettra peut-être aux marins d'éviter quelques-unes des embûches qui guettent les débutants avant d'aborder la haute mer... et les quelques exemples de recherches présentés ici — surtout s'ils ne prétendent pas à l'universalité — ne seraient certainement pas les mêmes s'ils ne tentaient pas de tenir compte des échecs du passé...